Zusammenfassung der Sätze und Definitionen

zur von Prof. Wirths im WS 97/98 gehaltenen Vorlesung

Analysis für Informatiker I

September 1998

von Carsten F. Buschmann
mail@carsten-buschmann.com

Inhalt

§1 Die angeordneten Körper IR und Q

Def 1.1 **Gruppe:**

G Menge mit einer Verknüpfung

1. Assoziativität: (a *b) * c = a * (b * c)
2. Existenz eines eindeutigen neutralen Elementes e: a * e = e * a = a
3. Existenz eines privaten inversen Elementes: $a * a^{-1} = e$
4. zusätzlich Kommutativität ⇒ abelsche (kom.) Gruppe

Def 1.2 **Körper:**

K Menge mit zwei Verknüpfungen +, *

1. (K, +) ist abelsche Gruppe
2. (K \ { 0 }, *) ist abelsche Gruppe
3. Distributivität: a * (b + c) = a * b + a * c

Def 1.3 **angeordneter Körper:**

(K, +, *) Körper, >, < Relationen

1. für je 2 Elemente gibt es genau 3 Beziehungen: a < b, a > b, a = b
2. Transitivität: a < b, b < c ⇒ a < c
3. Monotonie von + : a < b ⇒ a + c < b + c
4. Monotonie von * : a < b, 0 < c ⇒ a * c < b * c

Def 1.4 **Rechnen mit Beträgen:**

$$| a | = \begin{cases} a \text{ für } a >= 0 \\ -a \text{ für } a < 0 \end{cases}$$

Folgerungen:

| a * b | = | a | * | b |

| a + b | ≤ | a | + | b | Dreieicksungleichung u.v.m.

Def 1.5 **Beschränkung:**

M ≠ ∅, M ⊂ QI (IR)

M nach oben beschränkt ⇔ ∃ a mit x ≤ a ∀ x ∈ M

M nach unten beschränkt ⇔ ∃ a mit x ≥ a ∀ x ∈ M

M nach oben und unten beschränkt ⇔ M beschränkt

Sup/Inf:

falls a ∉ M:

a kleinste obere Schranke ⇒ a heißt Supremum

a größte untere Schranke ⇒ a heißt Infimum

Min/Max:

falls a ∈ M ⇒ a heißt Minimum (und Supremum) / Maximum (und Infimum)

Satz 1.6 **Vollständigkeitsaxiom:**

Es gibt genau einen Körper IR, in dem das Vollständigkeitsaxiom gilt:

M ⊂ IR ≠ ∅, M nach oben beschränkt ⇒ ∃ S ∈ IR mit S = Sup M

§ 2 Reelle Folgen

Def 2.1 eine **reelle Folge** $(a_n)_{n \in IN}$
ordnet jeder nat. Zahl n eine reelle Zahl a_n zu

$M (a_n) = \{ p \in IR \mid \exists\, n \in IN \text{ mit } p = a_n \}$

$(a_n)_{n \in IN}$ beschränkt $\Leftrightarrow$ $M (a_n)$ beschränkt

Def 2.2 **Häufungspunkte:**
$(a_n)_{n \in IN}$ beschränkte Folge
$h \in IR$ heißt Häufungspunkt $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ unendlich viele natürliche Zahlen n mit $| a_n - h | < \varepsilon$

Satz 2.3 **Häufungspunkte (von Bolzano-Weierstraß):**
Jede beschränkte reelle Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.
$H(a_n)$ sei die Menge der Häufungspunkte.

Def 2.4 **Limitees / Konvergenz:**
Max $H(a_n)$ heißt Limes superior
Min $H(a_n)$ heißt Limes inferior

Wenn lim inf = lim sup = A, heißt $(a_n)_{n \in IN}$ konvergent und A Grenzwert/Limes von $(a_n)_{n \in IN}$.

Satz 2.5 **Konvergenzkriterium:**
$\lim a_n = A \Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0\ \exists$ eine Zahl $N \in IN$ mit $| a_n - A | < \varepsilon$ für $n \geq N$

Satz **des Archimedes:**
zu jedem $\varepsilon > 0\ \exists$ ein $n \in IN$ mit $1/n < \varepsilon$

Satz **Bernoulli-Ungleichung:**
$(1+c)^n \geq 1 + nc$

Satz **Cauchy-Kriterium für Konvergenz:**
$(a_n)_{n \in IN}$ reelle konvergente Folge $\Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ ein $N \in IN$: $\forall\, n, m \geq N$: $| a_n - a_m | < \varepsilon$

Satz **Monotonie und Beschränktheit**
$(a_n)_{n \in IN}$ nach oben beschränkte, monoton steigende reelle Folge $\Rightarrow$
$\lim_{n \to \infty} a_n = \text{Sup } M (a_n) = S$

Satz **Vergleichs- oder Zangenkriterium**

§ 3A Komplexe Zahlen

Def 3.1 **Definition komplexer Zahlen**

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$: Betrag einer komplexen Zahl

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} \text{ oder } \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+i(-ad+bc)}{c^2+d^2}$$

Def 3.2 **(C, +, *) ist ein Körper**

Satz 3.3 **2 Wurzeln**

zu jeder Zahl $z \in C \setminus \{ 0 \}$ gibt es genau zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 mit

$$(z_k)^2 = z \qquad k = 1, 2$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i \cdot \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} \right)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi r}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi r}{n}\right)\right] \quad r = 0,1,\ldots,n-1$$

Def 3.4 **Polynome in C wie in IR**

Satz **Fundamentalsatz der Algebra**

Jedes Polynom vom Grad n hat n (nicht notwendig verschiedene Nullstelllen)

Hat ein Polynom die Nullstelle $z_0 \in C$ mit der Vielfachheit m, dann hat es auch die Nullstelle $\bar{z}_0$ mit der Vielfachheit m.

Def **Polarkoordinaten**

$z = | z | (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$z^n = | z |^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

Satz **komplexer Betrag**

$| z |, z \in C$ ist der Abstand von z vom Nullpunkt

Rechnen wie üblich mit Beträgen

§ 3B komplexe Folgen

Def 3.5 **komplexe Folgen**

jede Abb. a: IN $\rightarrow$ C, n $\rightarrow a_n$ heißt komplexe Folge $(a_n)_{n \in IN}$

M (a_n) = { p $\in$ C | $\exists$ n $\in$ IN mit p = a_n }

$(a_n)_{n \in IN}$ **beschränkt** $\Leftrightarrow$ M (a_n) beschränkt

h $\in$ C heißt **Häufungspunkt** $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ unendlich viele natürliche Zahlen n mit $| a_n - h | < \varepsilon$

Satz 3.6 **Häufungspunkte**

Jede beschränkte komplexe Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

H(a_n) sei die Menge der Häufungspunkte.

Satz 3.7 **Grenzwerte**

a) $\lim_{n->\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in IN$ mit $| a_n - a | < \varepsilon$ für $n \geq N$

b) $\lim_{n->\infty} \alpha_n + i\beta_n = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \lim_{n->\infty} \alpha_n = \alpha$ und $\lim_{n->\infty} \beta_n = \beta$

Satz **Rechenregeln für komplexe Folgen**

$(a_n)_{n \in IN}$, $\lim_{n->\infty} a_n = a$,

$(b_n)_{n \in IN}$, $\lim_{n->\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n->\infty} (a_n$ +-*/ $b_n) = a$ +-*/ b

Satz 3.8 **Cauchysches Konvergenzkriterium:**

$(a_n)_{n \in IN}$ beschränkte komplexe Folge $\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ ein $N \in IN$: $\forall$ n, m $\geq$ N: $| a_n - a_m | < \varepsilon$

Folgerung:

$(a_n)_{n \in IN}$ konvergent $\Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ ein $N \in IN$: $\forall$ n $\geq$ N: $| a_n - a_{n+1} | < \varepsilon$

§ 3C komplexe Reihen

Satz **Geometrische Reihe in C**

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \text{für } q \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1$$

Satz **Reihenentwicklungen**

Für $|z| < |c|$ $\quad \frac{1}{z-c} = \frac{1}{-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{c}} = -\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{c}\right)^n (z)^n$

$$\frac{1}{z+c} = \frac{1}{z-(-c)} = \frac{1}{-(-c)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{-c}} = -\frac{1}{-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{-c}\right)^n (z)^n$$

Für $|z| > |c|$ $\quad \frac{1}{z-c} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{c}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c^n \left(\frac{1}{z}\right)^n$

$$\frac{1}{z+c} = \frac{1}{z-(-c)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{-c}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-c)^n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Def 3.9 **Partialsummen**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexe Folge

$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißt Partialsumme

Konvergenz von Reihen:

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt konvergent gegen S $\Leftrightarrow \lim_{n \Rightarrow \infty} S_n = S$,

Satz **Cauchy-Krit. für Reihen**

Reihe konvergent $\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ ein $N \in \mathbb{N}$: $\forall\ n, m \geq N$:

$$\varepsilon > |S_n - S_m| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|$$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow a_n$ kann (muß aber nicht) konvergieren

Gegenteil

a_n gehen nicht gegen 0 $\Rightarrow$ Reihe divergiert

Satz **Dreiecksungleichung bei Reihen**

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent (aber nicht umgekehrt!)

Satz **Majoranten-Kriterium**

gilt für $k \geq N$ $|a_k| \leq c_k$ und ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent, dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Majorante: $\sum_{k=0}^{\infty} c\, q^k$ $c > 0$, $q \in (0, 1)$

Satz 3.10 **Wurzelkriterium**

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \; und \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; konvergieren$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \; existiert und < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \; und \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; konvergieren$$

Def **Exponentialfunktion**

$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = \exp(z) = e^z$ heißt Exponentialfunktion (konvergent für alle z)

Satz 3.11 **Cauchy-Produkt von Reihen**

$$\underset{\displaystyle A}{\underset{\downarrow}{\left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right)}}\underset{\displaystyle B}{\underset{\downarrow}{\left(\sum_{l=0}^{N} b_l\right)}} = \underset{\displaystyle AB}{\underset{\downarrow}{\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}} \underset{\displaystyle 0}{\underset{\downarrow}{\sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k+l=n} a_k b_l}} \qquad 0 < k, l \leq N$$

Def 3.12 **Binomialkoeffizient**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,\ k = 0, \ldots, n$$

heißt Binomialkoeffizient (n über k) und ist die Anz. der Möglichkeiten, aus n Dingen k Dinge verschieden auszuwählen.

Satz **Binomischer Lehrsatz**

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

Satz **Additionstheorem der Exponentialfunktion**

$\exp(w) * \exp(z) = \exp(w + z) = e^w e^z = e^{w+z}$

§ 3D Potenzreihen

Def 3.13 **Potenzreihe**

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ $c_k \in C$ Koeffizienten, $z_0 \in C$ Entw.pkt., $z \in C$ Variable

heißt Potenzreihe

Konvergenzradius

$$|z - z_0| < R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

Satz **Eulersche Formel**

kompl. Exponentialfkt. $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x (e^{iy})$

Satz **Sinus- und Kosinusreihe**

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Satz **Additionstheoreme in C**

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

§ 3E Z-Transformation

Satz **Z-Transformation**

$$(Y_n)_{n\in IN0} \xrightarrow[z]{} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n}{z^n} = F(z)$$

$$Y_n=0 \xrightarrow[z]{} F(z) \equiv 0$$

$$Y_n=1 \xrightarrow[z]{} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \text{ für } |z| > 1$$

$$Y_n=a_n\in C \xrightarrow[z]{} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{z}} = \frac{z}{z-\alpha} \text{ für } |z| > |\alpha|$$

$$Y_n=(n+1)a^n \xrightarrow[z]{} \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{\alpha^n}{z^n} = \frac{1}{(1-\frac{\alpha}{z})^2} = \frac{z^2}{(z-\alpha)^2} \text{ für } |z| > |\alpha|$$

Satz **Verschiebungssatz**

$$(Y_{n+k})_{n\in IN0} \xrightarrow[z]{} \left[F(z) - \left(Y_0 + \frac{Y_1}{z} + \ldots + \frac{Y_{k-1}}{z^{k-1}}\right)\right]z^k$$

Satz **Char. Polynom**

$$Y_{n+k} + \alpha_{k-1}Y_{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 Y_n = 0$$
$$z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \ldots + \alpha_0 = 0$$

n_r Basisfolgen zu einer reellen Nst. t_r mit Vielfachheit n_r:
$((t_r)^n)_{n\in IN}$, $((n+1)t_r^n)_{n\in IN}$, …, $(({}^{n+nr-1}{}_{nr-1})t_r^n)_{n\in IN}$

$2m_s$ Basisfolgen zu den kompl. Nst. z_s, z^*_s mit Vielfachheit m_s:
$(Re(z_s^n))_{n\in IN}$, $(Im(z_s^n))_{n\in IN}$,
$((n+1)\, Re(z_s^n))_{n\in IN}$, $((n+1)\, Im(z_s^n))_{n\in IN}$,
, … ,
$(({}^{n+ms-1}{}_{ms-1})Re(z_s^n))_{n\in IN}$, $(({}^{n+ms-1}{}_{ms-1})\, Im(z_s^n))_{n\in IN}$

§4A Stetige und differentierbare reelle und Komplexe Funktionen

Def 4.1 **Reelle und komplexe Funktionen**

Eine Zuordnung, die jedem $x \in D$ eine Zahl $f(x) \in IR$ zuordnet, heißt Funktion mit Definitionsbereich D

$D \subset IR$ $\quad$ $D \subset C$

$f: D \to IR$ $\quad$ $f: D \to C$

$x \to f(x)$ $\quad$ $z \to f(z)$

Def **Grenzwert**

$(x_n)_{n \in IN}$, $\quad x_n \in D$, $\quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$

Gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ für alle solche Folgen, heißt A Grenzwert von f in a

$\lim_{x\to a} f(x) = A$

Def 4.2 **Stetigkeit**

$f: D \subset C \to C$, $a \in D$

f heißt stetig in a $\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z) = f(a)$

f heißt stetig in D $\Leftrightarrow$ f stetig in allen $a \in D$

Satz 4.3 **δ - ε - Kriterium für Stetigkeit** (9.12.97)

f stetig in a $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, so daß aus $|z - a| < \delta$ folgt $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$

Satz **Folgerung aus δ - ε - Kriterium**

f stetig in a, $f(a) > b \Rightarrow$

$\exists \delta > 0$, so daß $f(x) > b$ für alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$ (auch mit <)

Satz **Zwischenwertsatz**

$f: [a, b] \to IR$ stetig in $[a, b]$, $f(a) < f(b)$

$\Rightarrow$ zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ gibt es eine Zahl $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = y$

Def **allg. Potenz**

$a > 0, x \in IR : a^x = e^{x \ln a}$

Satz **Satz vom Maximum (Minimum)**

$f: [a, b] \to IR$ stetig in $[a, b]$

$\Rightarrow$ es gibt $\mathrm{Max}\, f([a, b]) = \mathrm{Max}\, \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$

und $\mathrm{Min}\, f([a, b])$

Def 4.4 **Differenzenquotient**

$f: D \subset IR \to IR$, $x_0 \in D$

Falls $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert, heißt er Diffenrenzenquotient oder Ableitung von f in x_0 und f differenzierbar in x_0

Satz **Allg. Differentiationsregeln**

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \delta(z) \qquad z \neq z_0$$

Differenzierbarkeit in $z_0 \Leftrightarrow \delta(z) \underset{z \to z0}{\to} 0$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \delta(z)(z - z_0)$$

lin. Approximierbarkeit:
$f(z) \cong f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$

f in z_0 diff'bar $\Leftrightarrow$ f ist stetig in z_0

Satz **Taylorformel für Polynome**

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

Satz **Differentiation der Umkehrfunktion**

$f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) \neq 0$

$$f^{-1\prime}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

§4B Lineare Differentialgleichungen

Verfahren **Lineare homogene Differentialgleichungen mit konst. Koeffizienten**

$f^{(n)}(z) + a_{n-1} f^{(n-1)}(z) + ... + \; + a_0 f(z) = 0$

Ansatz:
$f(z)\, e^{\alpha z} \;\Rightarrow\; f^{(k)}(z) = \alpha^k e^{\alpha z}$
$e^{\alpha z} (\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_0) = 0$
char. Polynom $\chi(\alpha)$
Allg. Lösungen:
1. Nullstelle $\alpha \in$ IR mit Vielfachheit n:
   $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}$
2. Nullstelle $\alpha = a \pm ib \in$ C mit Vielfachheit n:
   $e^{(a \pm ib)x} = e^{ax}(\cos bx \pm i \sin bx) \Rightarrow$
   $e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, ..., x^{n-1}e^{ax} \cos bx$
   $e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \sin bx, ..., x^{n-1}e^{ax} \sin bx$

Verfahren **Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konst. Koeffizienten**

$f^{(n)}(z) + a_{n-1} f^{(n-1)}(z) + ... + \; + a_0 f(z) = b(x)$
$y_{inhom} = y_{hom} + y_{sp}$

Ansatz vom Typ der rechten Seite:

1. $b(x) = e^{\beta x} \sum_{k=0}^{r} d_k x^k$ m: Vielfachheit d. Nst. ß in $\chi(\alpha)$
   ges: ß,r,m
   $\Rightarrow y_{sp}(x) = x^m e^{\beta x} \sum_{k=0}^{r} u_k x^k$
2. $b(x) = e^{\beta x} \sin(\gamma x) \sum_{k=0}^{r} b_k x^k + e^{\beta x} \cos(\gamma x) \sum_{k=0}^{r} \widetilde{b}_k x^k$
   m: Vielfachheit d. Nst. (ß + iγ) in $\chi(\alpha)$
   ges: ß,r,m
   $\Rightarrow y_{sp}(x) = x^m e^{\beta x} \left(\sin(\gamma x) \sum_{k=0}^{r} u_k x^k + \cos(\gamma x) \sum_{k=0}^{r} \widetilde{u}_k x^k \right)$
3. Superposition

Verfahren **Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung**

$y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x) \qquad |e^{A(x)}$ (Vorr.: A' = a)

$e^{A(x)} y'(x) + a(x)\, e^{A(x)} y(x) =$

$\frac{d}{dx} (e^{A(x)} y(x)) = e^{A(x)} b(x) = B'(x)$ (Vorr.: $B' = b\, e^{A(x)}$)

$\frac{d}{dx} (e^{A(x)} y(x) - B(x)) = 0 \;\Rightarrow\; e^{A(x)} y(x) - B(x) = c$

$\Rightarrow$Allg. Lsg: $y(x) = c\, e^{-A(x)} + B(x)\, e^{-A(x)} \qquad c \in$ IR

§5A Kurvendiskussion reeller Funktionen

Satz **Satz von Rolle**

$f: [a, b] \to IR$ stetig

$f: (a, b) \to IR$ differenzierbar

$f(a) = f(b) \Rightarrow$ es gibt $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

Satz **1. Zwischenwertsatz**

$f: [a, b] \to IR$ stetig

$f: (a, b) \to IR$ differenzierbar

$$\Rightarrow \text{ es gibt } x_0 \in (a, b) \text{ mit } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz **2. Zwischenwertsatz**

f und $g: [a, b] \to IR$ stetig

f und $g: (a, b) \to IR$ differenzierbar

$g'(x) \neq 0$ auf (a, b)

$$\Rightarrow \text{ es gibt } x_0 \in (a, b) \text{ mit } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Satz **Regel von l'Hospital**

f und $g: [a, b] \to IR$ stetig

f und $g: (a, b) \to IR$ differenzierbar

$f(a) = g(a) = 0/\infty$

$g'(x) \neq 0$ auf (a, b)

$$\lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (falls dieser existiert (mit $\pm\infty$))

Fälle:

$1^\infty, \infty^0, 0^\infty \Rightarrow [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$

$\infty - \infty \Rightarrow f(x) - g(x) = \ln(e^{f(x) - g(x)}) = \ln \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$

Satz **Hinreichende Bed. für rel. Extrema**

$f, f', \ldots, f^{(n)}$ stetig um x_0

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$

es gilt:

$$n \text{ gerade} \Rightarrow \begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0: \text{Minimum} \\ f^{(n)}(x_0) < 0: \text{Maximum} \end{cases}$$

n ungerade $\Rightarrow$ kein Extremum (Sattelpunkt)

§5B Stammfunktionen und Ableitungen

Funktion f	Stammfunktion F
$\frac{1}{1+x^2}$	arctan x + c
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $x \in (-1, 1)$	arcsin x + c $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
1/x	ln | x | + c
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	ln | f(x) | + c
$\frac{1}{(x+a)^j}$ $j \geq 2$	$\frac{-1}{j-1} \frac{1}{(x+a)^{j-1}} + c$
$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x + c$
$\frac{1}{(x+b)^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x+b}{a} \right) + c$

§6 Integration

Def **Zerlegung**

$Z = \{ t_i \mid a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b \}$ heißt Zerlegung des Intervals [a, b]

Def **Ober- und Untersummen**

$\overline{S}(Z) = \sum_{i=1}^{n} Sup\ f([t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})$ heißt Obersumme

$\underline{S}(Z) = \sum_{i=1}^{n} Inf\ f([t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})$ heißt Untersumme

$\underline{S}(Z_1) \leq \overline{S}(Z_2)$

$\int_a^b f(x)dx$ *)= Inf O *) geeignetes Integralzeichen nicht verfügbar

$\int_a^b f(x)dx$ *)= Sup U

Def 6.1 **Riemann-Inregrierbarkeit**

f heißt Riemann-integrierbar über [a, b] $\Leftrightarrow$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Dann heißt $\int_a^b f(x)dx$ das (Riemann-)

Integral von f über [a, b] und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

Für Integrierbarkeit reicht es zu zeigen:

$\forall\ \varepsilon > 0$ gibt es Zerlegungen Z_1 und Z_2 mit $\overline{S}(Z_2) - \underline{S}(Z_1) < \varepsilon$

Def **Äquidestante Zerlegung**

$t_k = a + k \dfrac{b - a}{n}$

Satz f stetig $\Rightarrow$

es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N, so daß für ein $n \geq N$

Max { Max f([t_{i-1}, t_i]) - Min f([t_{i-1}, t_i]) | i = 1, ..., n } < ε / b-a

Satz **1. Zwischenwertsatz der Integralrechnung**

Es gibt zu jedem $t \in (a, b)$ mit $f(t) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

Def **Bestimmte und unbestimmte Integrale**

$\int_a^b f(x)dx$ heißt bestimmtes Integral

$\int f(x)dx = \int_f$ = {G + c | c $\in$ IR } heißt unbestimmtes Integral

Satz **Hauptsatz der Integralrechnung**

f: [a, b] → stetig, G Stammfunktion von f

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ = G(b) - G(a) = ${}_a^b[G(x)]$

Satz **Partielle Integration**

$\int f' g \, dx = fg - \int g' f \, dx$

Satz **Substitutionsregel**

$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$

$\Rightarrow \int F'(g(x))g'(x) = F(g(x)) + c$

Satz **Integration von Potenzreihen**

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius R

Stammfunktion $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ auf (-R, R)

Def **uneigentliche Integrale**

Riemann-Integrale sind definiert für gewisse beschränkte Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen.

Für unbeschränkte Funktionen oder Intervalle läßt sich in manchen Fällen eine "Fläche" als Grenzwert von Riemann-Integralen bilden. Solche Grenzwerte heißen uneigentliche Integrale.