

Zusammenfassung der Sätze und Definitionen

zur von Prof. Wirths im SS 98 gehaltenen Vorlesung

Analysis für Informatiker II

September 1998

von Carsten F. Buschmann
C.Buschmann@tu-bs.de

Inhalt

§1 Taylor-/Fourier-Reihen/-Polynome	3
§2 Rechnen im \mathbb{R}^N	6
§3A Differentiation von Skalarfeldern	8
§3B Komplexe Differentiation	10
§4 Lineare Differentialgleichungssysteme	12
§5 Nichtlineare Gleichungssystem	14
§6 Kurven und Kurvenintegrale	17
§7 N-Dimensionale Kurvenintegrale	21

§1 Taylor-/Fourier-Reihen-/Polynome

Def 1,1 Taylorpolynome

sind Polynome, die f lokal in der Nähe von x_0 möglichst gut approximieren

$x_0 \in \mathbb{R}$, $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

f n -mal diff 'bar in x_0

$T_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ heißt Taylorpoly. zu f in x_0 vom Grad n

Ansatz:

$$T_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^n A_k (x - x_0)^k$$

Forderung:

$$T_n^{(k)}(x_0, x) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 1, \dots, n$$

$$T_n^{(l)}(x_0, x) = \sum_{k=l}^n A_k k(k-1) \dots (k-l+1) (x - x_0)^{k-l}$$

$$T_n^{(l)}(x_0, x) = \sum A_k l! = f^{(l)}(x_0),$$

$$A_l = \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!}$$

Satz 1.2 Fehlerdarstellung für Taylorpolynome

$$\Delta_n(x) = f(x) - T_n(x_0, x)$$

$$= (-1)^n \int_{x_0}^x f^{(n-1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!} dt$$

wenn f stetig

Def 1.3 Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \text{ heißt Taylorreihe zu } f \text{ in } x_0$$

Sie konvergiert gegen $f(x)$ für $\Delta_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ innerhalb des Konvergenzradius $R > |x - x_0|$

Eine Funktion $f(x)$ lässt sich durch ihre Taylorreihe darstellen, wenn $f(z)$ um a komplex differenzierbar ist.

Def 1.4 Skalarfeld

$D \subset \mathbb{R}^N$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Skalarfeld auf D

Schreibweise: $f(x_1, \dots, x_n)$

Def 1.5 **partielle Ableitung**

$D \subset \mathbb{R}^N$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfeld
 $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$

$$\frac{d}{dx} f(x_1, \dots, x_n) \Big|_{x = x_1^0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

heißt partielle Ableitung von f nach x_1 in (x_1^0, \dots, x_n^0)

Def 1.6 **Gradient**

$D \subset \mathbb{R}^N$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfeld besitze partielle Ableitungen nach x_1, \dots, x_n überall in D

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ heißt Gradient von } f \text{ (grad } f)$$

Def 1.7 **Fourierpolynom**

$f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

heißt Fourierpolynom vom Grad n von f und Fourierreihe für $n \rightarrow \infty$

Def 1.8 **Fehlerdarstellung für Fourierpolynome**

$$\Delta_n^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2 dx$$

Minimaler Fehler:

$$\Delta_n^2(a_0, \dots, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - 2\pi a_0^2 - \sum_{k=1}^n \pi(a_k^2 + b_k^2)$$

Wenn $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$ existiert, gilt die Besselsche Ungleichung

$$2\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^n \pi(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

sowie $\Delta_n^2(a_0, \dots, b_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow$

Parsevalsche Gleichung:

$$2\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^n \pi(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

Satz

Wechsel der Periode

$f: [-t, t] \rightarrow \mathbb{R}$

$a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{t} + b_k \sin \frac{k\pi x}{t} \right)$ mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2t} \int_{-t}^t f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{t} \int_{-t}^t f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{t}\right) dx, \quad b_k = \frac{1}{t} \int_{-t}^t f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{t}\right) dx$$

f aperiodisch: $l \rightarrow \infty$ (Fouriertransformierte)

§ 2 Rechnen im \mathbb{R}^N

Def **Skalarprodukt**

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ heißt Skalarprodukt}$$

Def **Norm**

$$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \text{ heißt Norm}$$

Eigenschaften: wie Beträge

Def **Metrik**

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}| \text{ heißt Metrik und ist geometrisch als Abstand zwischen 2}$$

Punkten/Vektoren interpretierbar

Eigenschaften: wie Beträge

Def **Kugel**

$$K(\vec{x}_0, r) = \{ \vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_0| < r \} \text{ heißt (offene) Kugel um } \vec{x}_0 \text{ mit Radius } r$$

Def **Offnen Menge**

$$M \subset \mathbb{R}^N \text{ heißt offen} \Leftrightarrow \text{zu jedem } \vec{x}_0 \in M \text{ gibt es ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } K(\vec{x}_0, \varepsilon) \subset M$$

Def **(Weg-)zusammenhängende Menge**

$$M \subset \mathbb{R}^N \text{ heißt zusammenhängend} \Leftrightarrow \text{zu je zwei Punkten } \vec{x}_0, \vec{y}_0 \in M \text{ gibt}$$

es Punkte $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, so daß die Strecken zwischen \vec{x}_0 und \vec{x}_1 , \vec{x}_1 und \vec{x}_2 usw. in M liegen.

Def **Gebiet**

$$M \subset \mathbb{R}^N \text{ heißt Gebiet} \Leftrightarrow M \text{ ist offen und zusammenhängend}$$

Def **Folge im \mathbb{R}^N**

$$(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{N,n} \end{pmatrix} \text{ heißt Folge im } \mathbb{R}^N.$$

$(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Punktfolge, wenn alle Folgenglieder verschieden sind.

Def **Grenzwert einer Folge**

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^N \text{ heißt Limes oder Grenzwert einer Folge} \Leftrightarrow \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt}$$

es ein N , so daß $\vec{x}_n \in K(\vec{a}, \varepsilon)$ für $n > N$.

($\Leftrightarrow (x_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ (Komponentenfolgen) konvergieren gegen a_i)

- Def Häufungspunkt einer Folge**
 Eine Punktfolge $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt $\vec{a} \in \mathbb{R}^N$ als Häufungspunkt
 \Leftrightarrow es gibt eine Teilfolge, die gegen \vec{a} konvergiert
 \Leftrightarrow zu jedem zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Folgenglieder,
 die in $K(\vec{a}, \varepsilon)$ für $n > N$.
- Def Häufungspunkt einer Menge**
 \vec{a} heißt Häufungspunkt von $M \subset \mathbb{R}^N$, wenn es in M eine Punktfolge gibt,
 die \vec{a} als HP hat. (der HP muß nicht zur Menge gehören)
- Def abgeschlossene Menge**
 $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt abgeschlossen \Leftrightarrow alle HP's der Menge gehören zur Menge
- Def Abgeschlossen Hülle**
 $\bar{M} = M \cup \{\vec{a} \mid \vec{a} \text{ ist Hp von } M\}$ heißt abgeschlossene Hülle von M
- Def Offener Punkt**
 $\vec{x} \in M$ heißt offener Punkt von $M \Leftrightarrow$ es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $K(\vec{x}_0, \varepsilon) \subset M$
 (M offen \Leftrightarrow alle Punkte von M sind offen)
- Def Offener Kern von M**
 $\overset{\circ}{M}$ = Menge der offenen Punkte von M
- Def Rand einer Menge**
 $\partial M = \bar{M} - \overset{\circ}{M}$ heißt Rand von M
- Def Beschränkte Menge/Punktfolge**
 Eine Menge M (Punktfolge) des \mathbb{R}^N heißt beschränkt $\Leftrightarrow \{|\vec{x}| \mid \vec{x} \in M\}$ ist
 beschränkt.
 (\Leftrightarrow kein Punkt ist unendlich weit von Ursprung entfernt)
- Satz** Jede beschränkte unendliche Menge (Punktfolge) hat mindestens einen
 Häufungspunkt.
- Def Kompakte Menge**
 $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt kompakt $\Leftrightarrow M$ ist abgeschlossen und beschränkt.
- Def Stetigkeit**
 $D \subset \mathbb{R}^N$ $\vec{x}_0 \in D$ $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^L$ ($L=1$: Skalarfeld, $L=N$: Vektorfeld)
 \vec{f} stetig in $\vec{x}_0 \in D \Leftrightarrow$ die komponentenfunktionen von \vec{f} sind stetig in
 $\vec{x}_0 \in D$
- Satz Satz vom Minimum (Maximum)**
 $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt
 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetiges Skalarfeld auf K
 f nimmt auf K ein Minimum und ein Maximum an

§3A Differentiation von Skalarfeldern

Def 3.1 totale Differenzierbarkeit

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$; $f: K(\vec{a}, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in \vec{a} total differenzierbar \Leftrightarrow

$$f(\vec{x}) = (\Delta_1(\vec{x}), \dots, \Delta_N(\vec{x})) \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} + f(\vec{a}) \text{ und } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \Delta_i(\vec{x}) \text{ existieren: } i=1, \dots, N$$

Satz 3.2 Totale Differenzierbarkeit

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$; $f: K(\vec{a}, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$

f in \vec{a} total differenzierbar $\Rightarrow f$ ist in \vec{a} nach allen Variablen partiell

differenzierbar und $c_i = f_{x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$, d.h. $\vec{c} = \text{grad } f(\vec{a})$

Satz 3.3 Totale Differenzierbarkeit

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$; $f: K(\vec{a}, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$

f in $K(\vec{a}, \varepsilon)$ stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow f$ ist in \vec{a} total differenzierbar

Satz 3.4 Kettenregel

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$; $f: K(\vec{a}, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{\varphi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$\frac{d}{dt} f(t) = \sum_{i=1}^N f_{x_i}(\vec{\varphi}(t)) \varphi_i'(t) = \langle \text{grad } f(\vec{\varphi}(t)), \vec{\varphi}'(t) \rangle$$

Satz Mittelwertsatz für Skalarfelder

$D \subset \mathbb{R}^N$ offen

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar, $\vec{a}, \vec{b} \in D$, $\overline{\vec{a}\vec{b}} \subset D$

\Rightarrow Es gibt $\vec{c} \in \overline{\vec{a}\vec{b}}$ mit $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \langle \text{grad } f(\vec{c}), \vec{b} - \vec{a} \rangle$

Satz Satz von Schwarz

Sind alle 2. partiellen Ableitungen eines Skalarfeldes stetig, kommt es nicht auf die Reihenfolge der Differentiation an.

Def Eigenwerte

Eigenwerte einer Matrix A sind die Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\det(xE - A)$

Satz Satz aus der LA

Reelle, symmetrische Matrizen besitzen nur reelle Eigenwerte

Satz Cartesische Zeichenwechselregel

Hat das Polynom $x^n + \dots + a_0$ nur reelle Nullstellen, so gilt:

alle $a_i > 0 \Rightarrow$ alle Nullstellen neg.

alle $a_i a_{i,1} < 0 \Rightarrow$ alle Nullstellen pos.

Satz Minima und Maxima von Skalarfeldern

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$; $f: K(\vec{a}, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfeld hat in \vec{a} lokales Min/Max

$\vec{h} \neq \vec{0}$, $g_{\vec{h}}(t) = f(\vec{a} + t\vec{h})$ Geradenschar hat in $t=0$ für

1. alle \vec{h} ein Min/Max \Rightarrow f hat in \vec{a} ein Min/Max
2. mache \vec{h} ein Min und manche \vec{h} ein Max \Rightarrow f hat in \vec{a} einen Sattelpkt.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} g_{\vec{h}}(t) &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} f_{x_i}(\vec{a} + t\vec{h}) \right) h_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N f_{x_i x_j}(\vec{a} + t\vec{h}) h_j \right) h_i \stackrel{t=0}{=} \sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(\vec{a}) h_j h_i \\ &= (h_1, \dots, h_N) \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\vec{a}) & \dots & f_{x_1 x_N}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_N x_1}(\vec{a}) & \dots & f_{x_N x_N}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Def Hessematrix

$$\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\vec{a}) & \dots & f_{x_1 x_N}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_N x_1}(\vec{a}) & \dots & f_{x_N x_N}(\vec{a}) \end{pmatrix} \text{ heißt Hessematrix von } f \text{ in } \vec{a} : H_f(\vec{a})$$

Satz Forts.

$\sum_{i,j=1}^N f_{x_i x_j}(\vec{a}) h_j h_i$ sei

1. > 0 für alle $\vec{h} \Rightarrow$ f hat in \vec{a} ein lokales Min
2. < 0 für alle $\vec{h} \Rightarrow$ f hat in \vec{a} ein lokales Max
3. > 0 für manche \vec{h} und < 0 für manche $\vec{h} \Rightarrow$ f hat in \vec{a} einen Sattelpkt.

Schema Beziehung zwischen Eigenwerten von $H_f(\vec{a})$ und rel. Extrema

	f hat in \vec{a}	Eigenwerte von $H_f(\vec{a})$	Char. Polynom	$H_f(\vec{a})$ heißt
1	Minimum	alle EW > 0	Koeff. alternierend	pos. definit
2	Max	alle EW < 0	alle Koeff. > 0	neg. definit
3	Sattelpunkt	manche EW > 0 manche EW < 0	$a_0 \neq 0$, sonst weder 1 noch 2	indefinit
4	keine Auss.	alle EW = 0	nur $\lambda = 0$ Nullstelle	entartet
5	kein Minimum	manche EW = 0 manche EW < 0	$a_0 = \dots = a_{n-x} = 0$ alle anderen Koeff > 0	neg. semidefinit
6	kein Maximum	manche EW = 0 manche EW > 0	$a_0 = \dots = a_{n-x} = 0$ alle anderen Koeff alternierend	pos. semidefinit

§3B komplexe Differentiation

Def **komplexe Differenzierbarkeit**

$$f: K(z_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}; f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

f komplex differenzierbar \Leftrightarrow der komplexe Differenzenquotient existiert.

f = u + iv komplex differenzierbar in $z_0 \Leftrightarrow$ u, v total differenzierbar in (x_0, y_0) und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ -u_y(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Def **Laplace-Operator**

$D \subset \mathbb{R}^N$ offen; $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ 2x stetig partiell differenzierbar

$\Delta u = \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i} = 0$ heißt Laplace-Gleichung. Δ heißt Laplace-Operator. Die

Lösungen u der Laplace-Gleichung heißen harmonische Funktionen.

Satz **Komplexe Differenzierbarkeit**

Skalarfelder u, v erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$\Leftrightarrow f = u + iv$ ist komplex differenzierbar

$\Leftrightarrow \Delta u = \Delta v = 0$

Satz **Potential ϕ**

$D \subset \mathbb{R}^N$ Gebiet,

Für ein Vektorfeld $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^N$ existiert ein Skalarfeld $\phi: D \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow$

die Integrabilitätsbedingung $f_{ix_j} = f_{jx_i}$ für $1 \leq i < j \leq N$ erfüllt ist.

Def **exakte Differentialgleichung**

Die Differentialgleichung $f_1(x, y) + f_2(x, y) y' = 0$ heißt exakt $\Leftrightarrow f_{1y} = f_{2x}$

Satz

$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_x = f_1$, $\phi_y = f_2$

y ist Lösung einer exakten DGL $f_1(x, y) + f_2(x, y) y' = 0 \Leftrightarrow$

$\phi(x, y(x)) = \text{const.}$

Def **Euler-Multiplikator**

Ist $f_1(x, y) + f_2(x, y) y' = 0$ nicht exakt, so heißt eine Funktion $M(x, y)$

EulerMultiplikator $\Leftrightarrow M f_1 + M f_2 y' = 0$ ist exakt.

$$a(x) = \frac{f_{1y} - f_{2x}}{f_2} \quad a(y) = \frac{f_{2x} - f_{1y}}{f_1} \Rightarrow M = e^{\int a dx}$$

Satz **Übergang von $f(x + iy)$ zu $f(z)$**

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re}(z) \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \operatorname{Im}(z)$$

Nach Einsetzen und ausrechnen fällt \bar{z} heraus

Satz Liegt ein Teil der reellen Achse im Definitionsbereich, so kann man auch $x = z$ und $y = 0$ setzen

Def **Komplexer Logarithmus**

$$\ln z := \ln |z| + i\varphi \quad (\Leftrightarrow z = |z| e^{i\varphi})$$

heißt komplexer Logarithmus und ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0, x \leq 0\}$ komplex differenzierbar.

$$(\ln(x + iy))' = 1/z$$

§4 Lineare Differentialgleichungssysteme

Satz Satz von Cayley-Hamilton

$$\det(xE - A) = \sum_{k=0}^N a_k x^k \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k A^k = 0_{N \times N}$$

Verfahren Lin. hom. quadratische DGL-Systeme mit konst. Koeff. und AWP

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x), \quad \text{mit AWP } \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

$$\vec{y}' = A\vec{y} \Rightarrow \vec{y}^{(k)} = A^k \vec{y}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k A^k \vec{y} = 0_{N \times N} \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^N a_k \vec{y}^{(k)} = \vec{0} \Rightarrow 0$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^N a_k y_r^{(k)}(x) = 0} \quad r=1, \dots, N \text{ heißen ass. DGL mit allg. Lsg.}$$

$$y_r = c_{11} l_1(x) + \dots + c_{N1} l_N(x) \Rightarrow$$

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} l_1(x) \\ \vdots \\ l_N(x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(x) \\ \vdots \\ l_N(x) \end{pmatrix} = C\vec{l}(x) \Rightarrow$$

$$\vec{y}'(x) = C\vec{l}'(x) \Rightarrow \vec{y}^{(k)}(x) = C\vec{l}^{(k)}(x) \Rightarrow A^k \vec{y}(x) = C\vec{l}^{(k)}(x); \quad k=0, \dots, N-1 \Rightarrow$$

$$A^k \vec{y}_0 = C\vec{l}^{(k)}(x_0); \quad k=0, \dots, N-1$$

in Matrix-Form:

$$\boxed{(\vec{y}_0, A\vec{y}_0, A^2\vec{y}_0, \dots, A^{N-1}\vec{y}_0) = C(\vec{l}(x_0), \dots, \vec{l}^{(N-1)}(x_0))}$$

$$Y = CL(x_0)$$

$$\boxed{C = Y L^{-1}(x_0)}$$

L^{-1} existiert $\Leftrightarrow L$ regulär (voller Rang)

$$\boxed{\vec{y}(x) = C\vec{l}(x)}$$

Satz Lösbarkeit von AWP's

Jedes AWP hat genau eine Lösung

$\Rightarrow \dim IL = N$

Def Fundamentalsystem

Eine Menge $\{\vec{y}_i : IR \rightarrow IR^N \mid i=1, \dots, N\}$ heißt Fundamentalsystem von $\vec{y}' = A\vec{y} \Leftrightarrow$ sie ist Basis von IL.

Für ein Fundamentalsystem $\{\vec{y}_i : IR \rightarrow IR^N \mid i=1, \dots, N\}$ ist

$$IL = \left\{ \sum_{i=1}^N c_i \vec{y}_i \mid \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \in IR^N \right\}$$

Verfahren Bestimmung eines Fundamentalsystems mit AWP

Bestimme die Lösung von N AWP's $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x), \vec{y}(x_0) = \vec{e}_i, i = 1, \dots, N,$ wobei e_i Basis des IR^N

Verfahren Bestimmung eines Fundamentalsystems mit EW $\in IR$

wenn die EW $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ von A paarweise verschieden sind, so sind die Eigenvektoren $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_N \in IR^N$ Linear unabhängig \Rightarrow

$\vec{c}_1 e^{\lambda_1 x}, \dots, \vec{c}_N e^{\lambda_N x} = \vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_N(x)$ sind Fundamentalsystem

Verfahren Bestimmung eines Fundamentalsystems mit EW $\in C$

$\lambda = a + ib, \bar{\lambda} = a - ib$ komplexe Eigenwerte von A

Eigenvektoren zu $\lambda : \vec{c} = \vec{\alpha} + i\vec{\beta} \quad \bar{\lambda} : \bar{\vec{c}} = \vec{\alpha} - i\vec{\beta}$

komplexe Lösungen: $\vec{c} e^{\lambda x}, \bar{\vec{c}} e^{\bar{\lambda} x}$

$(\vec{\alpha} + i\vec{\beta})(e^{ax} \cos(bx) + i e^{ax} \sin(bx))$

reelle Lösungen: $Re(\vec{c} e^{\lambda x}), Im(\vec{c} e^{\lambda x})$

Def Wronski-Matrix

$\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_N(x)$ Fundamentalsystem von $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x)$, dann heißt

$W(x) = (\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_N(x))$ Wronski-Matrix des DGL-Systems-

$$IL = \left\{ W(x)\vec{c} = \sum_{i=1}^N c_i \vec{y}_i \mid \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \in IR^N \right\}$$

Verfahren Lin. inhom. DGL-Systeme mit konst. Koeff.

$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$

$\vec{y} : IR \rightarrow IR^N$

$\vec{y} = \vec{y}_{hom} + \vec{y}_{sp} = W(x)\vec{c} + \vec{y}_{sp}$

Ansatz (der Variierten Konstanten):

$\vec{y}_{sp} = W(x) \underbrace{\vec{c}(x)}_{\text{var. Konst.}}$ (weil auch y_{sp} in IL liegen muß)

$\vec{y}'_{sp} = W'(x)\vec{c}(x) + W(x)\vec{c}'(x)$

$= A\vec{y}_{sp}(x) + \vec{b}(x)$

$= AW(x)\vec{c}(x) + \vec{b}(x) \Rightarrow$

$W(x)\vec{c}'(x) = \vec{b}(x) \Rightarrow \vec{c}'(x) = \int W(x)^{-1} \vec{b}(x) \Rightarrow \vec{y}_{sp} = W(x) \int W(x)^{-1} \vec{b}(x)$

§5 Nichtlineare Gleichungssysteme

Lösbarkeitsbedingung für $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}_M$

$$\vec{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M \quad N > M$$

Es gibt ein $\vec{a} \in \mathbb{R}^N$ mit $\vec{F}(\vec{a}) = \vec{0}_M$

Ersetze $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}_M$ **in der Nähe von** \vec{a} **durch ein lin. System**

(F_k stetig partiell differenzierbar in $K_\varepsilon(\vec{a})$)

$$F_k(x_1, \dots, x_N) = F_k(\vec{a}) + \sum_{i=1}^N (F_{kx_i}(\vec{a}) + \delta_{k,i}(\vec{x}))(x_i - a_i) \quad k=1, \dots, M$$

$$\delta_{k,i}(\vec{x}) \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \vec{y}} 0$$

$$F_k(x_1, \dots, x_N) \approx F_k(\vec{a}) + \sum_{i=1}^N (F_{kx_i}(\vec{a})(x_i - a_i))$$

$$\vec{F}(\vec{x}) \approx F_k(\vec{a}) + \begin{pmatrix} F_{1x_1}(\vec{a}) & \dots & F_{1x_N}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{Mx_1}(\vec{a}) & \dots & F_{Mx_N}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_N - a_N \end{pmatrix}$$

(Verallgemeinerung der Ersetzung einer Funktion durch ihre Tangente)

Def

Jakobi-Matrix

$\vec{F}: K_\varepsilon(\vec{a}) \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ stetig partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\frac{d\vec{F}}{d\vec{x}}(\vec{a}) = J_{\vec{F}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} F_{1x_1}(\vec{a}) & \dots & F_{1x_N}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{Mx_1}(\vec{a}) & \dots & F_{Mx_N}(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } F_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ \text{grad } F_M(\vec{a}) \end{pmatrix} \text{Jakobi-Matrix von}$$

\vec{F} in \vec{a} .

Def

Totale Ableitung

Die lin. Abb. $\Phi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ $\Phi(\vec{x}) = J_{\vec{F}}(\vec{a})\vec{x}$ heißt totale Ableitung von \vec{F} in \vec{a} .

Satz

Satz über implizite Funktion und lokale Auflösbarkeit

$\vec{F}: K_\varepsilon(\vec{a}) \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen.

$$\vec{F}(\vec{a}) = \vec{0}_M$$

Betrachtung der Jakobi-Matrix

$$\frac{d\vec{F}}{d\vec{x}}(\vec{a}) = J_{\vec{F}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} F_{1x_1}(\vec{a}) & \dots & F_{1x_M}(\vec{a}) & F_{1x_{M+1}}(\vec{a}) & \dots & F_{1x_N}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{Mx_1}(\vec{a}) & \dots & F_{Mx_M}(\vec{a}) & F_{Mx_{M+1}}(\vec{a}) & \dots & F_{Mx_N}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\partial \vec{F}}{\partial (x_1, \dots, x_M)}(\vec{a})} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{\partial \vec{F}}{\partial (x_{M+1}, \dots, x_N)}(\vec{a})}$$

Ist die Determinante von $\frac{\partial \vec{F}}{\partial (x_1, \dots, x_M)}(\vec{a}) \neq 0$ (d.h. Rang $J_{\vec{F}}(\vec{a}) = M$), dann gibt es eine lokale Auflösung des nichtlin. Gleichungssystems

$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}_M$ nach den Variablen x_1, \dots, x_M , d.h. folgendes:

Benennungen

$$x_1 = y_1 \dots x_M = y_M$$

$$x_{M+1} = z_1 \dots x_N = z_{N-M}$$

$$a_1 = b_1 \dots a_M = b_M$$

$$a_{M+1} = c_1 \dots a_N = c_{N-M}$$

Es gibt eine Kugel $K_\delta(\vec{c}) \subset \mathbb{R}^{N-M}$ und eine Kugel $K_\tau(\vec{b}) \subset \mathbb{R}^M$ und eine eind. def. Funktion $\vec{v}: K_\delta(\vec{c}) \rightarrow K_\tau(\vec{b})$, so daß $\vec{v}(\vec{c}) = \vec{b}$ und

$\vec{F}(\vec{v}(\vec{z}), \vec{z}) = \vec{0}_M$. \vec{v} ist stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen.

Die Ableitungen werden nach der Kettenregel berechnet.

$$\begin{pmatrix} F_{1x_1}(\vec{a}) & \dots & F_{1x_M}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{Mx_1}(\vec{a}) & \dots & F_{Mx_M}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1z_1}(\vec{c}) & \dots & v_{1z_{N-M}}(\vec{c}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{Mz_1}(\vec{c}) & \dots & v_{Mz_{N-M}}(\vec{c}) \end{pmatrix} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial (x_{M+1}, \dots, x_N)}(\vec{a}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial (x_1, \dots, x_M)}(\vec{a}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial (z_1, \dots, z_{N-M})}(\vec{c}) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial (x_{M+1}, \dots, x_N)}(\vec{a}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial (z_1, \dots, z_{N-M})}(\vec{c}) = - \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial (x_1, \dots, x_M)}(\vec{a}) \right)^{-1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial (x_{M+1}, \dots, x_N)}(\vec{a})$$

Def Singuläre und reguläre Punkte

$$K = \{ \vec{x} \mid \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0} \}$$

$\vec{a} \in K$ heißt regulärer Punkt von $K \Leftrightarrow \text{Rang } J_{\vec{F}}(\vec{a}) = M$

$\vec{a} \in K$ heißt singulärer Punkt von $K \Leftrightarrow \text{Rang } J_{\vec{F}}(\vec{a}) < M$

K heißt regulär \Leftrightarrow alle Punkte von K sind regulär.

Satz Restringierte Optimierung und Lagrange-Multiplikatoren

$$\vec{g}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M, \quad N > M \quad \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_M(x_1, \dots, x_N) \end{pmatrix}$$

$K = \{ \vec{x} \mid \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0} \}$ kompakte Menge

$f: K \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

g_i, f stetig partiell differenzierbar

Seien $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K$ mit $f(\vec{x}_1) = \text{Max } f(K)$ und $f(\vec{x}_2) = \text{Min } f(K)$

Wenn \vec{x}_1, \vec{x}_2 reguläre Punkte von K sind, dann gibt es M reelle Zahlen

$$\lambda_1, \dots, \lambda_M, \text{ so daß } \text{grad } f(\vec{x}_1) = \sum_{i=1}^M \text{grad } g_i(\vec{x}_1) \lambda_i$$

Bem. Es gibt 2 Sorten von Kandidaten für Extrema:

1. Singuläre Punkte

2. die Lösungen $x_1, \dots, x_N, \lambda_1, \dots, \lambda_M$ des Gleichungssystems

$$g_1(x_1, \dots, x_N) = 0$$

:

$$g_M(x_1, \dots, x_N) = 0$$

$$\text{grad } f_{x_1}(x_1, \dots, x_N) - \sum_{i=1}^M g_{ix_1}(x_1, \dots, x_N) \lambda_i = 0$$

:

$$\text{grad } f_{x_N}(x_1, \dots, x_N) - \sum_{i=1}^M g_{ix_N}(x_1, \dots, x_N) \lambda_i = 0$$

§6 Kurven und Kurvenintegrale

Def **Parameterdarstellung einer Kurve**

$$\wp: \vec{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_N(t) \end{pmatrix}$$

Tangente $\frac{\vec{\varphi}(t_0) - \vec{\varphi}(t)}{t_0 - t} \xrightarrow{t_0 \rightarrow t} \dot{\vec{\varphi}}(t_0)$, wenn Parameterdarst. differenzierbar.

Def **Trägermenge der Kurve**

$$\text{Trägermenge} = \text{Tr}(\wp) = \{ \vec{\varphi}(t) \mid t \in [a, b] \}$$

Def **Kurve**

Kurve \approx Trägermenge + Durchlaufungsrichtung

Def **Glatte Parameterdarstellung**

$$\vec{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \dot{\vec{\varphi}}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ stetig, } \dot{\vec{\varphi}}(t) \neq \vec{0}$$

Def **Äquivalente Darstellung**

$$\vec{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \vec{\psi}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ glatt heißen äquivalent } \Leftrightarrow$$

Es gibt $f: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ mit f ist bijektiv, $f' > 0$, f' stetig und $\vec{\psi}(f(t)) = \vec{\varphi}(t)$

Eine Kurve ist Äquivalenzklasse äquivalenter Darstellungen.

Def **Tangente bei äquivalenten Darstellungen**

$\vec{\varphi}, \vec{\psi}$ äquivalent

$$\dot{\vec{\varphi}}(t) = \dot{\vec{\psi}}(f(t)) f'(t)$$

Richtung der Tangente ist Kurveneigenschaft, die Größe Eigenschaft der Darstellung

Def **Stückweise glatte Kurve**

Summe aus endlich vielen glatten Kurven

Satz **gegenläufige Kurve**

zu $\wp: \vec{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist $-\wp: -\vec{\varphi}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $-\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(-t)$

Satz **Länge einer glatten Kurve**

$$L(\wp) = \int_a^b |\dot{\vec{\varphi}}| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dots + \dot{\varphi}_N^2(t)} dt$$

Länge ist eine Kurveneigenschaft

Def Kurvenintegral

$G \subset \mathbb{R}^N$ offen $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ glatte Kurve mit $\text{Tr}(\varphi) \subset G$

$\vec{K}: G \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetiges Vektorfeld

Das Kurvenintegral längs φ über $\vec{K} \int_{\varphi} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$ wird definiert durch

$$\int_a^b \vec{K}(\vec{\varphi}(t)) \bullet \dot{\vec{\varphi}}(t) dt$$

Satz Kurvenintegral der gegenläufigen Kurve

$$\int_{-\varphi} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = - \int_{\varphi} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$$

Satz Potential

Besitzt $\vec{K}: G \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Potential Φ , so gilt für eine Kurve $\varphi \vec{\varphi}: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\text{Tr}(\varphi) \subset G$ mit Anfangspunkt $\vec{a} = \vec{\varphi}(a)$ und Endpunkt $\vec{b} = \vec{\varphi}(b)$:

$$\int_{\varphi} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$$

Satz Wegunabhängigkeit

Besitzt $\vec{K}: G \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Potential $\Phi \Leftrightarrow \int_{\varphi} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$ ist in G wegunabhängig

\Leftrightarrow Das Kurvenintegral ist wegunabhängig, wenn das Kurvenintegral über jede geschlossene Kurve 0 ist.

$\Leftrightarrow G$ ist einfach zusammenhängend (hat keine Löcher)

Ist $\int_{\varphi} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$ in G wegunabhängig, $\vec{a} \in G$ fest, so ist $\Phi(\vec{x}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} \vec{K}(\vec{y}) \bullet d\vec{y}$

ein Potential zu \vec{K} .

Def Komplexe Kurvenintegrale

Kurve in \mathbb{C} : $z(t) = x(t) + i y(t)$

$$z = x + iy$$

$f: G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \rightarrow f(z)$ stetig

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\int_{\varphi} f(z) \bullet dz = \int_{\varphi} (u + iv) \bullet (dx + idy) = \int_{\ell} u dx - v dy + i \int_{\ell} v dx + u dy$$

Satz Rechenregeln für komplexe Kurvenintegrale

$$1. \int_{\ell} (g(z) + f(z)) dz = \int_{\ell} g(z) dz + \int_{\ell} f(z) dz$$

$$2. a \in \mathbb{C}: \int_{\ell} a f(z) dz = a \int_{\ell} f(z) dz$$

Satz

Existenz einer Stammfunktion

G einfach zusammenhängend

$f = u + iv$ komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

\Rightarrow Wenn U, V mit

$$\begin{aligned}U_x &= u = V_y, \\U_y &= -v = -V_x\end{aligned}$$

existieren und $a, b \in \mathbb{C}$ Anfangs- bzw. Endpunkt von γ , dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) \bullet dz = (U(b) - U(a)) + i(V(b) - V(a))$$

Es kann zu f nur dann eine Stammfkt. $F = U + iV$ geben, wenn

$$\begin{aligned}U_{xy} &= u_y & V_{xy} &= v_y \\U_{yx} &= -v_x & V_{yx} &= u_x\end{aligned}$$

\Rightarrow Das Vektorfeld $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ hat ein Potential U , wenn $u_y = v_x$

\Rightarrow Das Vektorfeld $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ hat ein Potential V , wenn $v_y = u_x$

Satz

Cauchyscher Integralsatz

G einfach zusammenhängendes Gebiet

$f = u + iv$ komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

γ geschlossene Kurve in G

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) \bullet dz = 0$$

Satz

1. Cauchysche Integralformel

$f = u + iv$ komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

γ einfach geschlossene Kurve in G , die math. positiv durchlaufen wird

$a \in I(\gamma)$ (im Inneren der Kurve)

$$\Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Satz

Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel

$f = u + iv$ komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

γ einfach geschlossene Kurve in G

$a \in I(\gamma)$ (im Inneren der Kurve)

$$\Rightarrow f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz$$

Satz

Residuensatz

$f = u + iv$ komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

$u_x = v_y, u_y = -v_x$

\wp einfach geschlossene Kurve in G

$a_1, \dots, a_n \in I(\wp)$ (im Inneren der Kurve)

$$\int_{\wp} \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^N (z-a)^{k_i+1}} dz = \sum_{j=1}^N \int_{K_j} \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^N (z-a)^{k_i+1}} dz = \sum_{j=1}^N R_j$$

Anwendung der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel

$$\int_{K_j} \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^N (z-a)^{k_i+1}} dz = \int_{K_j} \frac{f(z)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N (z-a)^{k_i+1} (z-a)^{k_j+1}} dz =$$

$$\frac{d^{k_j}}{(dz)^{k_j}} \left(\frac{f(z)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N (z-a)^{k_i+1} (z-a)^{k_j+1}} \right) \Bigg|_{z=a_j} \frac{2\pi i}{k_j!} = R_j$$

Satz

Jede in einem Kreis um a komplex differenzierbare Funktion f lässt sich

dort in die Potenzreihe $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ entwickeln.

§7 N-dimensionale Integration

Satz Mehrfachintegrale auf Quadern

$B = \{ (x_1, \dots, x_N) \mid a_i \leq x_i \leq b_i \}$ (Quader)
 f stetig auf B

$$\text{Man kann } \iiint_B f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = \int \dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_N$$

explizit ausrechnen, die Integrationsreihenfolge ist bei stetigem f egal.

Satz Integrale auf durch Funktionen beschränkten Bereichen

$B = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x) \}$

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Satz 2-dim. Verfahren nach Satz von Gauß in der Ebene

\wp einfach geschlossene Kurve, $\text{Tr}(\wp) \subset \mathbb{R}^2$

$\vec{K}: I(\wp) \cup \text{Tr}(\wp) \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbares Vektorfeld

$$\iint_{I(\wp)} (K_{2x}(x, y) - K_{1y}(x, y)) dx dy = \int_{\wp} K_1(x, y) dx + K_2(x, y) dy$$

Rechnerisch:

$$\iint_{I(\wp)} f(x, y) dx dy = ?$$

Berechne $\vec{K}(x, y)$ mit $f(x, y) = K_{2x}(x, y) - K_{1y}(x, y)$

Satz Transformationformel

N Quader, B komplexeres Gebiet

$\vec{x} \in N, \vec{y} \in B,$

$\vec{g}: N \rightarrow B, \vec{g}(N) = B, \vec{g}$ inj. auf $\dot{N}, \det(J_{\vec{g}}(\vec{x})) \neq 0$ für $\vec{x} \in \dot{N}$

\vec{g} stetig partiell diffbar

$f: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\int \dots \int_B f(\vec{y}) d\vec{y} = \int \dots \int_N f(\vec{g}(\vec{x})) |\det(J_{\vec{g}}(\vec{x}))| d\vec{x}$$

$\downarrow \rightarrow \Rightarrow \Leftarrow \subset \supset \pm \cap \neq \emptyset \Leftrightarrow \{ \} \wedge \vee \Sigma \Delta \gamma \alpha \beta \delta \chi \epsilon \phi \lambda \mu \pi \tau \nu \Phi \approx \cong \partial^\circ \infty \exists \forall \in \notin \equiv$