Institut für Geometrie
Prof. Dr. S. Löwe/ K. Kunitz

WS 98/99
25. Februar 1999

Musterlösung zur Klausur vom 24.2.98

Logik für Studierende der Informatik

1. (a)

$$\varphi = ((P \leftrightarrow Q) \to R) \land (\neg R \to (\neg R \to Q))$$

P	Q	R	$P \leftrightarrow Q$	$(P \leftrightarrow Q) \to R$	$\neg R$	$\neg R \to Q$	$\neg R \to (\neg R \to Q)$	φ
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1

(b)

$$\begin{aligned}
\varphi &\sim (P^{\neg 0} \lor Q^{\neg 0} \lor R^{\neg 0}) \land (P^{\neg 1} \lor Q^{\neg 0} \lor R^{\neg 0}) \land (P^{\neg 1} \lor Q^{\neg 1} \lor R^{\neg 0}) \\
&\sim (P^1 \lor Q^1 \lor R^1) \land (P^0 \lor Q^1 \lor R^1) \land (P^0 \lor Q^0 \lor R^1) \\
&\sim (P \lor Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor R) \\
&\sim ((P \land \neg P) \lor Q \lor R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor R) \\
&\sim (Q \lor R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor R)
\end{aligned}$$

2. Annahme: $\underline{\underline{H}}^T$ ist konsistent. Dann ist $\underline{\underline{H}}^T$ erfüllbar (Theorem 4.16 der VL). Sei $w \Vdash \underline{\underline{H}}^T$. Weil φ keine Tautologie ist, gibt es eine Belegung $\tilde{w}$ mit $\tilde{w}(\varphi) = 0$. Definiere

$$\Sigma : \underline{Var} \to \underline{\underline{A}}, \quad p_i \mapsto \begin{cases} p_i & \text{falls } w(p_i) = \tilde{w}(p_i) \\ \neg p_i & \text{falls } w(p_i) \neq \tilde{w}(p_i). \end{cases}$$

Dann ist für alle $\psi \in \underline{\underline{A}}$

$$\tilde{w}(\psi) = w(\psi^\Sigma).$$

Insbesondere gilt:

$$1 = w(\varphi^\Sigma) = \tilde{w}(\varphi) = 0.$$

Das ist ein Widerspruch. Demnach ist die Annahme falsch. $\underline{\underline{H}}^T$ ist inkonsistent.

q.e.d.

3. (a)

$$\neg\varphi = \neg(((P \to (Q \to R)) \land Q) \to (P \to R))$$

<table>
<tr><th colspan="3">Knoten</th><th>Regel</th></tr>
<tr><td colspan="3">$\neg\varphi_1$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">$(P \to (Q \to R)) \land Q; \neg((P \to R))$</td><td>$(\neg \to)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(P \to (Q \to R)) \land Q; P; \neg R$</td><td>$(\neg \to)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\neg((P \to (Q \to R)) \to \neg Q); P; \neg R$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">$P \to (Q \to R); \neg\neg Q; P; \neg R$</td><td>$(\neg \to)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$P \to (Q \to R); Q; P; \neg R$</td><td>$(\neg\neg)$</td></tr>
<tr><td>$\neg P; Q; P; \neg R$</td><td colspan="2">$Q \to R; Q; P; \neg R$</td><td>$(\to)$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\neg Q; Q; P; \neg R$</td><td>$R; Q; P; \neg R$</td><td>$(\to)$</td></tr>
</table>

(b)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= (P \to Q) \to (R \lor P \to R \lor Q) \\ &\sim (P \to Q) \to ((\neg R \to P) \to (\neg R \to Q)) \end{aligned}$$

1	$P \to Q; \neg R \to P; \neg R \vdash \neg R$	AR
2	$P \to Q; \neg R \to P; \neg R \vdash \neg R \to P$	AR
3	$P \to Q; \neg R \to P; \neg R \vdash P$	MP auf 1 und 2
4	$P \to Q; \neg R \to P; \neg R \vdash P \to Q$	AR
5	$P \to Q; \neg R \to P; \neg R \vdash Q$	MP auf 3 und 4
6	$P \to Q; \neg R \to P \vdash \neg R \to Q$	DT auf 5
7	$P \to Q \vdash (\neg R \to P) \to (\neg R \to Q)$	DT auf 6
8	$\vdash (P \to Q) \to ((\neg R \to P) \to (\neg R \to Q))$	DT auf 7

4. Sei P_W ein Registerprogramm mit

$$P_W : \zeta \mapsto \begin{cases} \square & \text{falls } \zeta \in W \\ \eta \neq \square & \text{sonst} \end{cases}$$

und $P_{W'}$ ein Registerprogramm mit

$$P_{W'} : \zeta \mapsto \begin{cases} \square & \text{falls } \zeta \in W' \\ \eta \neq \square & \text{sonst} \end{cases}$$

Programm P_W	
0	...
1	...
⋮	⋮
k - 1	PRINT
k	HALT

Programm $P_{W'}$	
0	...
1	...
⋮	⋮
m - 1	PRINT
m	HALT

$P_{W\setminus W'}$	
0	$R_1 := R_0$
1	`(Zeile 0 von` $P_{W'}$`)`
2	`(Zeile 1 von` $P_{W'}$`)`
⋮	⋮
m - 1	`(Zeile m - 2 von` $P_{W'}$`)`
m	IF $R_0 = \square$ THEN m + k + 2 ELSE m + 1 OR ... OR m + 1
m + 1	$R_1 := R_0$
m + 2	`(Zeile 0 von` P_W`)`
2t + m + 1	`(Zeile 1 von` P_W`)`
⋮	⋮
m + k	`(Zeile k - 2 von` P_W`)`
m + k + 1	GOTO 2t + m + k + 1
m + k + 2	LET $R_0 = R_0 + a_0$
m + k + 3	PRINT
m + k + 4	HALT

5. 1. Versuch: $\mathcal{I}^{\mathcal{M}} = \{a\}$. Dann bedeutet φ

$$(Pa \wedge \neg Qa) \wedge Qa.$$

Das geht nicht.

2. Versuch: $\mathcal{I}^{\mathcal{M}} = \{a, b\}, a \neq b$. Dann folgt aus φ, daß Q für ein Element gelten muß und für das andere nicht. Sei o.B.d.A. $\neg Qa$ und Qb. Dann bedeutet φ

$$\forall x Px.$$

Also: $b \in Q$ und $a, b \in R$. Dieses ist das kleinste Modell!

6. Es gilt nach Konstruktion/Definition: Ist $X \subseteq Y$ und Y gedeckelt, dann gilt $X^d \subseteq Y$ (*).

   (a) Es gilt $X^d \subseteq X^d$ und X gedeckelt. Damit gilt wegen (*) $(X^d)^d \subseteq X^d$. Nach Konstruktion ist $X^d \subseteq (X^d)^d$. Somit gilt $X^d = (X^d)^d$.

   (b) $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_2^d$. Wegen $X_1 \subseteq X_2^d$ und X_2 gedeckelt folgt mit (*) $X_1^d \subseteq X_2^d$.

   (c) Das folgt aus (*), weil X_2^d gedeckelt ist.